

PROPUESTA METODOLÓGICA PARA ENSEÑAR EL CONCEPTO DE RAZÓN DE MANERA GRADUAL

METHODOLOGICAL PROPOSAL FOR A GRADUAL TEACH OF RATIO CONCEPT

Paola Donoso Riquelme, Natalia Reyes Vergara

Universidad de Magallanes, Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación. (Chile)

paola.donoso@umag.cl, natalia.reyes2015@umce.cl

Resumen

El presente trabajo, es el resultado de una experiencia de aprendizaje, desarrollada por ocho estudiantes de la carrera de Licenciatura y Pedagogía en Educación Básica, en el curso de Pensamiento Variacional y Proporcional. Experiencia cuyo objetivo fue, identificar elementos matemáticos que influyen en la comprensión y adquisición del concepto de razón, con los cuales elaborar una propuesta metodológica que permita detectar los errores y aciertos, que manifiestan los escolares al resolver problemas de razones y proporciones. Corresponde a una investigación cualitativa, y el método de recolección de datos fue el enfoque de grupo. El resultado obtenido, corresponde a la creación de cinco niveles de dificultad, de menor a mayor grado, presentado en forma de escalera, donde cada nivel especifica el contenido matemático requerido para aprender el concepto de razón. Se concluye, que esta experiencia permitió a los futuros docentes, vivenciar de manera significativa que el concepto de razón es complejo de aprender, y por lo mismo, de enseñar.

Palabras clave: razón, enfoque de grupo, didáctica

Abstract

The present paper is the result of a learning experience, developed by eight students of the Bachelor and Pedagogy in Basic Education, in the class of Variational and Proportional Thinking. Experience whose objective was to identify mathematical elements that influence the understanding and acquisition of the concept of ratio, with which they elaborate a methodological proposal that allows to detect mistakes and right guess, that schoolchildren manifest when solving problems of ratios and proportions. It corresponds to qualitative research, and the method of data collection was the focus group. The result obtained, corresponds to the creation of five levels of difficulty, presented in the form of a staircase, where each level specifies the mathematical content required to learn the concept of ratio. It is concluded that this experience allowed to future teachers, to experience in a significant way that the concept of ratio is complex to learn, and for the same reason, to teach.

Key words: ratio, focus group, didactics

■ Introducción

El objetivo de la investigación es elaborar una propuesta didáctica que facilite la enseñanza y aprendizaje del concepto de razón en escolares de educación básica. El contenido de Razón y Proporción se encuentra presente en la mayoría de los planes y programas de estudio del mundo. Principalmente se enseña en los últimos años de educación primaria, ya que, requiere de conocimientos previos como: fracciones, números decimales, y porcentajes. Sin estos conocimientos, el concepto de razón será difícil de adquirir, y así lograr desarrollar el pensamiento proporcional en los escolares (Lobato, Ellis, Charles, y Zbiek, 2010).

La Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación (UMCE), de Chile, otorga la carrera de Licenciatura en Educación, Pedagogía en Educación General Básica, mención en matemáticas, y uno de los cursos de la mención, es Pensamiento Variacional y Proporcional, siendo Razones y Proporciones uno de sus núcleos temáticos. Para dar cumplimiento a lo establecido por el programa del curso, se ejecutó la experiencia didáctica que se presenta a continuación. Ambas autoras de este escrito participaron en esta experiencia, una siendo la profesora y la otra una de las estudiantes.

■ Planteamiento del problema

La Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, de Chile, imparte la totalidad de las carreras de pedagogía, una de ellas corresponde a Pedagogía en Educación General Básica, la cual prepara a profesionales para desempeñarse en el sistema escolar chileno, enseñando en los niveles de 1° a 8° de Educación Básica. Esta carrera, otorga menciones que permite al futuro docente especializarse en una disciplina o área determinada, una de ellas corresponde a la mención de matemáticas. El currículo de la mención de matemática está organizado de tal manera que el módulo de “*Pensamiento Variacional y Proporcional*”, se dicta en el cuarto semestre de la mención, previo a ello, los estudiantes han cursado: *Pensamiento y lenguaje matemático y su enseñanza*; *Pensamiento numérico I y II*, donde se enseñan números naturales, números enteros, racionales y su enseñanza. De acuerdo al programa curricular de la mención de matemáticas, los futuros profesores que cursan cuarto semestre deben poseer todos los contenidos matemáticos y su enseñanza, los necesarios para desarrollar en los escolares el pensamiento variacional y proporcional, objetivo del curso: “*Pensamiento Variacional y Proporcional*”.

Pues bien, en la práctica, los futuros docentes llegan a cuarto semestre de la mención de matemáticas, fortalecidos en su conocimiento de la materia, que involucra sistema de números naturales, enteros y racionales; pero con deficiencias en su conocimiento pedagógico. En otras palabras, resuelven toda clase de ejercicios y problemas matemáticos, pero no saben explicar cómo lo hicieron, y como resultado, no saben enseñarlo.

El problema radica en que existe un desequilibrio entre el conocimiento del contenido matemático y el conocimiento pedagógico, transformándose en un obstáculo al querer desarrollar el pensamiento variacional y proporcional, ya que, los futuros profesores no comprenden que resolver ejercicios y problemas matemáticos de manera mecánica y memorística, no es una manifestación de los procesos del razonamiento matemático, en este caso del pensamiento proporcional. Por ello, es que, en cuarto semestre de la mención de matemáticas, los futuros profesores deben lograr un equilibrio entre el conocimiento matemático y pedagógico, y desde ahí, comprender la importancia de la educación matemática en el desarrollo del pensamiento, tarea que ellos deberán realizar con sus futuros aprendices de matemáticas.

El presente trabajo, pretende dar respuesta a parte del problema. Para lo cual, se ha seleccionado el concepto de razón, como conocimiento del contenido matemático específico, y a través de la participación en clases del curso “*Pensamiento Variacional y Proporcional*”, pretende que los estudiantes de pedagogía, identifiquen aspectos pedagógicos que les permitan enseñar este concepto, y como resultado propongan una estrategia didáctica, que les

sirva tanto para enseñar razones, como para identificar los errores y/o dificultades que puedan manifestar sus futuros aprendices.

■ Marco teórico

Desde los años ochenta, que existen los términos: conocimiento pedagógico, conocimiento del contenido, y conocimiento curricular. Shulman (1986), introduce estos términos, evidenciando que los profesores para enseñar cualquier disciplina deben saber: qué enseñar, cómo enseñar, y cuando enseñar, cada uno de ellos, responde a los conocimientos pedagógico, del contenido, y curricular. En el campo de las matemáticas, diversos autores han contribuido a precisar el contenido específico de esta disciplina (Ball, 1990; Ball, Hill, y Bass, 2005; Ball, Thames y Phelps, 2008; Krauss, Brunner, Kunter, Baumert, Blum, Neubrand y Jordan, 2008; Ma, 1999). Destaca el trabajo de Ma (1999), quien concluyó que enseñar matemáticas en educación básica, requiere una comprensión profunda de esas matemáticas, refiriéndose al conocimiento esencialmente matemático.

Razón, proporción y proporcionalidad, son objetos de conocimiento matemático necesarios e indispensables para desarrollar el pensamiento proporcional, es por esto, que se encuentran presentes en la mayoría de los currículos de los países del mundo, todos ellos presentan similitudes en la organización de los temas y en la forma de enseñarlos (Adjage y Pluvineau, 2007; Martin, Mullis y Foy, 2008; Obando, Vasco, y Arboleda, 2014; Ponte y Marques, 2007; TIMSS, 2009). En Chile, por ejemplo (Ministerio de Educación de Chile, 2013), el concepto de razón se comienza a enseñar en Quinto de Educación Básica (Educación Primaria en otros países), escolares entre 10 y 11 años.

El pensamiento proporcional, o también denominado razonamiento proporcional, es el más abstracto según los estudios de Piaget e Inhelder (1997), equivocadamente muchos profesores se sienten satisfechos, al ver que sus estudiantes aplican la regla de tres para resolver problemas de razones y proporciones, creyendo de esta manera que sus alumnos han desarrollado el pensamiento proporcional. Está comprobado que el uso de la regla de tres no es una manifestación del pensamiento proporcional (Andonegui, 2006; Cramer, Post, y Currier, 1993; Mochón 2012; Rivas 2012), inclusive muchas veces los estudiantes aplican la regla de tres para resolver problemas que no corresponden a proporciones, dejando en evidencia el desconocimiento matemático que involucra la regla de tres.

Este trabajo, evidencia la variedad de aspectos matemáticos involucrados en la adquisición y comprensión del concepto de razón, necesarios para el desarrollo del pensamiento proporcional, dejando fuera la regla de tres.

El concepto de razón involucra conocimientos de fracciones, prerrequisitos para la comprensión de las razones y proporciones, posee un lenguaje específico, que se confunde con el utilizado en fracciones, argumento que confirma la relevancia de ser enseñado (Andonegui, 2006; Block, 2008; Ramírez y Block, 2009). Además de las fracciones, está vinculado a los conocimientos de porcentajes y números decimales. Estos cuatro elementos - razones, fracciones, porcentajes y números decimales - debiesen ser enseñados de manera conjunta, con el propósito de que los escolares puedan reconocer la relación que existe entre unos y otros, y así, dar paso al aprendizaje de los números racionales. Todos ellos, se utilizan en situaciones de relación parte-todo relativas a la multiplicación y a la división, siendo fundamentales y requisitos para el desarrollo del razonamiento proporcional (Mamede, 2010; Mamede y Nunes, 2008).

Existen serias dificultades en la enseñanza de los números racionales, ya que, el escolar debe aprender nuevos símbolos, nuevas formas de operar con ellos, nuevas propiedades, donde algunas de las reglas matemáticas aprendidas anteriormente no se aplican, al nuevo conjunto numérico. Por ejemplo, sumar fracciones es muy diferente a sumar números naturales. Por tanto, la adquisición de los números racionales requiere nuevos procesos cognitivos, de los cuales el profesor debe estar consciente. Diferentes investigaciones (Adjage y Pluvineau, 2007; García y Serrano, 1999; Lesh, Post, y Behr, 1988; Martin et al., 2008; Vergnaud, 1988, 1994) informan que los

alumnos no alcanzan niveles apropiados de aprendizaje en estas temáticas durante su ciclo escolar, lo que dificulta el desarrollo del pensamiento proporcional.

Otros estudios (Bufo y Fernández, 2014; Fernández y Llinares, 2012; Valdemoros, 2010), confirman que el esquema operativo de la proporcionalidad, exige el conocimiento de igualdad de dos razones y una estrategia compensatoria entre sus términos, lo cual es difícil y no se adquiere hasta la etapa de las operaciones formales, inclusive algunos adultos no llegan a adquirirlo, por ello, es que un porcentaje alto de estudiantes para maestros se encuentran en un nivel de razonamiento pre-proporcional centrado en las relaciones cualitativas o únicamente centrado en los significados de los números racionales, o en reglas algorítmicas como la regla de tres, sin tener adquirido las formas de razonar con estos significados, y sin comprender la forma en la que el razonamiento proporcional se desarrolla.

En síntesis, el concepto de razón es un conocimiento específico de las matemáticas, que se encuentra presente en el desarrollo del pensamiento proporcional. Y como hemos evidenciado, posee características que lo hacen difícil de aprender, y por ello, es difícil de enseñar. Las razones y proporciones, es un tema que genera serias dificultades en los escolares, producto de ello es el resultado de esta investigación.

■ Método

Corresponde a una investigación cualitativa, donde el método de recolección de datos es el enfoque de grupo. La muestra la componen ocho estudiantes que cursan la asignatura “*Pensamiento Variacional y Proporcional*” de la carrera de Licenciatura en Educación, Pedagogía en Educación General Básica, de la mención de matemática, de la Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación (UMCE), en Chile.

La investigación se desarrolló en cinco sesiones, cada sesión corresponde a cinco clases del curso “*Pensamiento Variacional y Proporcional*”, lo que permitió que los alumnos se sintieran en un ambiente cómodo y conocido.

La primera sesión consistió en identificar los conocimientos, correctos o errados, que poseían los futuros profesores sobre razones y proporciones. Se aplicó una prueba de lápiz y papel, donde los estudiantes debían responder: *¿Qué es una razón?, ¿Para qué sirve?, Identificar los elementos de una razón, Escribir la razón 3:5 con palabras.* Identificar la correspondencia entre fracciones y números decimales. Y, resolver tres problemas de razones y proporciones de dificultad baja, media y alta, respectivamente. Luego, se discutieron las respuestas, lo que provocó que los estudiantes reconocieran sus fallos y aciertos. Llegando a la conclusión, de que podían resolver los problemas sin mayor dificultad (conocimiento del contenido matemático), pero no pudieron responder las preguntas; reconocieron no saber qué es una razón, y para qué sirve. A su vez, manifestaron no saber qué relación tienen los números fraccionarios y decimales con las razones y proporciones. Como resultado de esta sesión, los estudiantes admitieron no comprender el concepto de razón, y por ello, tampoco saber enseñarlo.

La segunda y tercera sesión, se destinó a discutir sobre los contenidos matemáticos de fracciones, porcentajes, números decimales; y evidenciar la implicancia que tienen dentro de las razones y proporciones, al igual que, se examinaron artículos científicos que tratan sobre el Razonamiento Proporcional y su desarrollo.

La cuarta sesión, consistió en expresar todo lo que sabían sobre razones, y en conjunto elaborar una definición matemática y formal de razón. Además, plantearon y resolvieron problemas de razones, los cuales fueron clasificados en bajo, medio y alto, según el grado de dificultad en su resolución.

La quinta y última sesión identificaron elementos matemáticos, que le otorgan mayor o menor grado de dificultad a los problemas de Razones, con lo cual crearon cinco niveles. Cada nivel, otorga información específica sobre

aspectos matemáticos aprendidos por el escolar, determinando el grado de conocimiento logrado. Información que permite al profesor decidir avanzar, retroceder, o modificar sus prácticas en la enseñanza de razones.

■ Resultados

Producto de esta experiencia, los futuros profesores aprendieron que, para resolver problemas matemáticos, los escolares deben desarrollar habilidades de pensamiento, como:

- Interpretar datos.* Saber que se está preguntando, para saber que responder.
- Inferir.* Saber extraer información que aparece oculta, necesaria para resolver el problema.
- Identificar distractores.* Reconocer elementos distractores que aparecen en el problema, y saber que no se utilizan al momento de resolverlo.

El análisis de los problemas creados por los futuros profesores, aportaron un listado de elementos, que se deben considerar al momento de plantear problemas matemáticos. Ellos son:

- Contexto significativo para el escolar.
- Lenguaje utilizado, debe estar redactado correctamente.
- Ámbito numérico, ámbito conocido para el escolar que lo resuelve.
- Posible de resolver, que tenga una o más soluciones.
- Los números que aparecen en el problema deben ser posibles de representar en la vida real (ejemplo: 1,8 casas, no es real).
- Grado de dificultad matemática, corresponde al conocimiento matemático que se requiere para resolverlo.

Específicamente para resolver problemas matemáticos de razón, se proponen cinco niveles de dificultad, los cuales han sido representados con la figura de una escalera (Figura 1). Los niveles han sido denominados como:

- 1° Nivel. Leer y escribir una razón
- 2° Nivel. Simplificar
- 3° Nivel. Identificar los elementos de la razón, y operar con ellos
- 4° Nivel. Calcular la constante K
- 5° Nivel. Multiplicar los elementos de la razón por su valor unitario



Figura 1. Escalera con niveles de dificultad en la enseñanza del concepto de razón.

Como resultado final de la experiencia, surge una propuesta metodológica que permite al profesor, identificar aspectos matemáticos que involucran el concepto de razón, en la resolución de problemas. Niveles que deben ser considerados en la enseñanza de este concepto. Cada nivel involucra conocimientos que se deben adquirir en orden

creciente de dificultad. En la Tabla 1 se registran los niveles, su descripción y un ejemplo de problema por nivel (problemas creados por los participantes de este estudio).

Tabla 1. Niveles de dificultad en los problemas de razón.

Nivel	Descripción del nivel	Ejemplo de problema
Nivel 1	Leer y escribir una razón.	Marta tiene 3 sándwich para repartir entre 2 niños ¿Cuál es la razón entre sándwich y niños?
Nivel 2	Simplificar una o más razones.	Javier tiene 9 autos y Pedro tiene 3. ¿En qué razón están los autos de Javier y Pedro?
Nivel 3	Identificar los elementos de la razón, y operar con ellos.	Sofía y Pepa tienen 56 lápices y están en la razón 3:4. Si Sofía tiene 24 lápices ¿Cuántos lápices tiene Pepa?
Nivel 4	Calcular la constante K.	Un florista preparara coronas de flores con rosas, tulipanes y orquídeas. Si debe preparar una corona con 60 flores en donde las rosas, las orquídeas y tulipanes se encuentren en la razón 7:2:3 respectivamente. ¿Cuánta será la cantidad de cada tipo de flor que llevará la corona?
Nivel 5	Multiplicar los elementos de la razón por su valor unitario	

■ Conclusiones

A partir del marco teórico, se puede concluir que enseñar matemáticas en Educación Básica, requiere de una comprensión y conocimiento profundo de las matemáticas, por parte de los docentes. El pensamiento proporcional, está inmerso en la mayoría de los currículos de los países del mundo, en Chile el concepto de razón se comienza a enseñar desde quinto año de educación básica a la edad de los 10 a 11 años. El concepto de razón posee un lenguaje específico que se puede confundir con el lenguaje utilizado en las fracciones, además la razón está involucrada directamente en los conocimientos de porcentajes, números decimales y fracciones. A su vez, desde el inicio de la enseñanza de las razones es conocido el uso y abuso de la regla de tres, sin embargo, esta regla no puede evidenciar, y no constituye el desarrollo del pensamiento proporcional, debido a que este se puede aplicar en cualquier contexto matemático, donde no necesariamente se requiere de un conocimiento cercano al uso de la regla, dejando de lado el significado y el uso que tiene. Finalmente, podemos concluir que las dificultades que se presentan en los números racionales están relacionadas directamente con que los escolares deben aprender nuevos símbolos, nueva forma de operar con ellos, nuevas propiedades, lo que exige nuevos procesos cognitivos, de los cuales el profesor debe estar consciente. Asimismo, los estudiantes no llegan alcanzar los niveles apropiados del aprendizaje de esta temática durante el ciclo escolar, lo que dificulta el desarrollo del pensamiento proporcional.

La actividad de plantear problemas, y luego analizarlos en conjunto, permitió que los futuros profesores, tomaran conciencia de la importancia del contexto y lenguaje utilizado en los problemas creados, aspectos que nunca antes habían considerado. Como resultado, aprendieron a ser críticos de los problemas presentados en los libros de textos escolares, los cuales, muchas veces no corresponden al contexto real de los escolares, convirtiéndose en un obstáculo en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, más que en un elemento facilitador, ya que, el escolar puede poseer el conocimiento matemático para resolverlo, pero desconoce el lenguaje y contexto utilizado, transformándose en una dificultad que le impide aplicar su conocimiento matemático de manera correcta.

Además, los estudiantes que participaron en este estudio desconocían los aspectos matemáticos que tienen en común: fracciones, porcentajes, razones y números decimales; ignorando su importancia en el desarrollo del pensamiento proporcional. Una vez aprendido, confirmaron que el pensamiento proporcional, no se reduce a la

regla de tres, pues, requiere de un lenguaje matemático específico, involucra reglas, símbolos, operaciones, representaciones y significados.

El reconocer aspectos específicos de dificultad en el planteamiento de problemas, sumado a los conocimientos matemáticos que involucran el concepto de razón, les permitió a los estudiantes, proponer cinco niveles de dificultad en problemas de razones. Lo que dio como resultado la propuesta didáctica presentada en este trabajo.

Por último, se pretende que esta propuesta se convierta en una herramienta para los profesores, con la cual se pueda detectar en qué nivel se encuentra el escolar y qué dificultades manifiesta, y una vez identificados poder superarlos. Aunque los niveles aquí expuestos abarcan exclusivamente el concepto de razón, pueden ser utilizados para otros contenidos matemáticos, considerando aquellos aspectos matemáticos específicos que involucra el concepto que se desea enseñar.

La proyección de este trabajo es lograr establecer niveles de dificultad que sean posibles de identificar en la enseñanza de cualquier contenido matemático, tomando elementos que sean de carácter general y estén presentes en la didáctica de las matemáticas, como sucede con el uso del lenguaje matemático, elemento que se ubica en el primer nivel de nuestra escalera.

■ Referencias bibliográficas

- Adjiage, R. y Pluvillage, F. (2007). An experiment in teaching ratio and proportion. *Educational Studies in Mathematics*, 65(2), 149-175.
- Andonegui, M. (2006). *Cuaderno N°11 Razones y proporciones*. Caracas: Federación Internacional fe y alegría.
- Ball, D. (1990). The Mathematical Understandings that Prospective Teachers Bring to Teacher Education. *The Elementary School Journal*, 90(4), pp. 449-466.
- Ball, D., Hill, H. y Bass H. (2005). Knowing mathematics for teaching. Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, 29(1), 14-17 20-22, 43, 46.
- Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Block, D (2008). El papel de la noción de razón en la construcción de las fracciones en la escuela primaria, en R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Un reporte iberoamericano*, México, Díaz de Santos de México, Clame, pp. 495-512.
- Buform, Á. y Fernández, C. (2014). Conocimiento de matemáticas especializado de los estudiantes para maestro de primaria en relación al razonamiento proporcional. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 28(48), 21-41.
- Cramer, K., Post, T. y Currier, S. (1993). Learning and teaching ratio and proportion: Research implications: Middle grades mathematics. In D. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics* (pp. 159-178). New York, NY: MacMillan Publishing Company.
- Fernández, C. y Llinares, S. (2012). Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la educación primaria y secundaria. *Enseñanza de las ciencias*, 2012, 30(1), 129-142.
- García, G. y Serrano, C. (1999). *La comprensión de la proporcionalidad: una perspectiva social y cultural*. Bogotá, Colombia: Asociación Colombiana de Matemática Educativa.
- Krauss, S., Brunner, M., Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M. y Jordan, A. (2008). Pedagogical Content Knowledge of Secondary Mathematics Teachers. *Journal of Educational Psychology*, 100(3), pp. 716-725. doi: 10.1037/0022-0663.100.3.716
- Lesh, R., Post, T. y Behr, M. (1988). Proportional Reasoning. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (Vol. 2, pp. 93-117). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates.

- Lobato, J., Ellis, A., Charles, R. y Zbiek, R. (2010). *Essential understandings: Ratios, proportions, and proportional reasoning*. In R. M. Zbiek (Series Ed.), *Essential understandings*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).
- Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publisher.
- Mamede, E. (2010). Early years mathematics – the case of fractions. In V. Durand- Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the sixth Congress of European Research in Mathematics Education* (pp. 2607-2616). Lyon, France: Institut National de Recherche Pédagogique.
- Mamede, E. y Nunes, T. (2008). Building on children's informal knowledge in the teaching of fractions. In O. Figueras, J. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and 30th North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 345- 352). Morelia, México: Cinvestav-UMSNH.
- Martin, M., Mullis, I. y Foy, P. (2008). *TIMSS 2007 International mathematics report: Findings from IEA's trends in international mathematics and science study at the fourth and eight grades*. Boston, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center.
- Ministerio de Educación de Chile. (2013). *Matemática. Programa de estudio quinto año básico*. Recuperado de https://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-18980_programa.pdf
- Mochón, S. (2012). Enseñanza del razonamiento proporcional y alternativas para el manejo de la regla de tres. *Educación Matemática*, 24 (1), 133-157.
- Obando, G., Vasco, C. y Arboleda, L. (2014). Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: Un estado del arte. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17 (1), pp. 59-81.
- Piaget, J. y Inhelder, B. (1997). *Psicología del niño* (Vol. 369). Ediciones Morata.
- Ponte, J. y Marques, S. (2007). *Proportion in school mathematics textbooks: a comparative study*. In V. Durand- Guerrier, S. Soury-Lavergne y F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the fifth Congress of European Research in Mathematics Education* (pp. 2443-2452). Larnaca, Cyprus: University of Cyprus.
- Ramírez, M. y Block, D. (2009). La razón y la fracción: un vínculo difícil en las matemáticas escolares. *Educación matemática*, 21(1), 63-90
- Rivas, M. (2012). *Análisis epistémico y cognitivo de tareas de proporcionalidad en la formación de profesores de educación primaria* (tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada, España.
- Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), pp. 4-14.
- TIMSS. (2009). *TIMSS 2007 user guide for the international database*. Boston, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center.
- Valdemoros, M. (2010). Dificultades didácticas en la enseñanza de razón y proporción: estudio de caso. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13, pp. 423-440.
- Vergnaud, G. (1988). Multiplicative Structures. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (Vol. 2, pp. 141-161). Reston, VA: Lawrence Erlbaum associates.
- Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: what and why? In H. Guershon y J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 41-60). New York, NY: State University of New York Press.